

УДК 531.39

## ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ИЗГИБ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ КОНСЕРВАТИВНОЙ СИЛОЙ

*Ю.П. Артюхин*

### Аннотация

В статье дано дальнейшее развитие разработанного автором приближенного метода исследования произвольного упругого изгиба стержня силами, неизменными в пространстве. Рассмотрен изгиб консоли сосредоточенной силой тяжести на ее конце. Получено численно точное решение для десяти значений консервативной нагрузки, которое сравнивалось с аналогичным приближенным решением. При этом изгиб консоли составил 0.8 ее длины. Полученная точность результатов достаточна для проведения инженерных расчетов.

**Ключевые слова:** упругость, консервативная нагрузка, начальный параметр, большие прогибы, приближенное решение.

---

### Введение

Точное решение задачи произвольного изгиба стержней сосредоточенными силами при условии нерастяжимости их оси построено Е.П. Поповым [1] в виде параметрических уравнений, в которые входят эллиптические интегралы и эллиптические параметры. Эллиптические параметры находятся из системы трансцендентных уравнений на основании свойств периодичности эллиптических интегралов с помощью формул приведения эллиптических интегралов с любой амплитудой к кратному значению полного эллиптического интеграла и эллиптическому интегралу с табличной амплитудой. Для вычисления эллиптических интегралов Е.П. Попов пользовался таблицами эллиптических интегралов [2], позволяющими получить решение с некоторой степенью точности. При этом необходимо использовать процедуру интерполяции. В настоящее время нет необходимости пользоваться этими таблицами, ибо они включены в аналитические математические пакеты в качестве встроенных функций [3] и вычисляются при любой амплитуде с погрешностью (по умолчанию)  $10^{-16}$ . Для нахождения корней трансцендентных уравнений в пакетах представлены также соответствующие встроенные функции, представляющие собой программы численного вычисления корней в заданной окрестности и с заданной погрешностью [3]. Точные решения нелинейных задач изгиба стержней при распределенных нагрузках, как правило, отсутствуют.

В [4] предложен приближенный способ вычисления произвольных прогибов стержней при любой нагрузке, учитывающий растяжение оси. Метод основан на замене деформированной кривой ломаной, состоящей из прямолинейных стержней, для которых известно решение малого изгиба, растяжения и кручения. Нелинейный изгиб стержня составлен из малого изгиба, а также растяжения и его жесткого поворота. В дополнение к этому используется метод начальных параметров. Приближенное решение можно уточнять, увеличивая число элементов и уменьшая шаг нагружения. В [4] решена задача изгиба в кольцо заделанного стержня сосредоточенным изгибающим моментом на конце. В этом случае начальные параметры

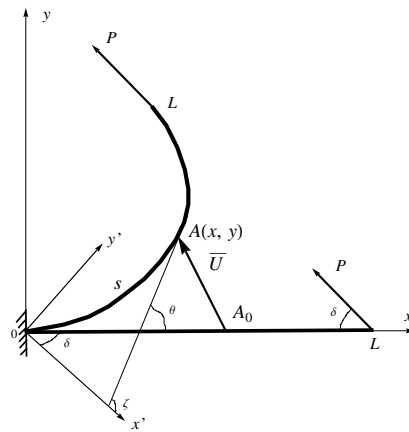


Рис. 1

в заделке полностью определяются при любом значении момента, и поэтому нет необходимости проводить итерации по нагрузке. В настоящей статье определяется сопоставимый с его длиной прогиб консольного стержня сосредоточенной силой тяжести на конце, имеющей постоянное направление, приближенным методом [4]. В этом случае начальные параметры в заделке зависят от нагружающей силы и могут быть определены только итерационно последовательными нагружениями. Для оценки точности приближенного решения пришлось провести вычисления с помощью пакета [2] по решению Попова [1], где приведены лишь графические результаты с точностью до 3 значащих цифр. Дается сравнение точного и приближенного решений.

### 1. Точное решение задачи произвольного изгиба стержня

Пусть консольно закрепленный стержень длины  $L$  изгибается постоянно действующей консервативной («мертвой») силой  $P$ , наклоненной к первоначальному положению консоли под углом  $\delta$  (рис. 1). Введем две системы координат: неподвижную систему  $(x, y)$  и подвижную («следящую») систему  $(x', y')$ , связанную с направлением нагрузки  $P$ . Ось  $Ox'$  будет совпадать с противоположным направлением силы  $P$ . Если сила будет «следящей» (угол  $\delta$  является величиной переменной), то есть одинаково изменяется при деформации вместе с нормалью в точке ее приложения, то система  $(x', y')$  будет подвижной. Но в системе осей  $(x', y')$  угол  $\delta$  не меняется. Для «мертвой» нагрузки оси  $(x', y')$  будут неподвижны и повернуты относительно осей  $(x, y)$  на постоянный угол  $\delta$ . На рис. 1 изображено произвольное положение деформированного стержня, определяемое точкой  $A(x, y)$ . Касательная в точке  $A$  к деформированной консоли образует с осью  $x$  угол  $\theta$ , а с осью  $x'$  — угол  $\zeta$ . Связь между углами имеет вид

$$\theta = \zeta - \delta.$$

Переход от подвижной системы координат к неподвижной осуществляется с помощью формул

$$x = x' \cos \delta + y' \sin \delta, \quad y = y' \cos \delta - x' \sin \delta. \quad (1)$$

Первоначальное положение материальной точки  $A_0$  определяется длиной  $s = OA_0$ . Вектор перемещений  $\bar{U}$  переносит эту материальную точку в точку  $A(x, y)$  плоскости. В дальнейшем будем пренебрегать изменением длины оси стержня,

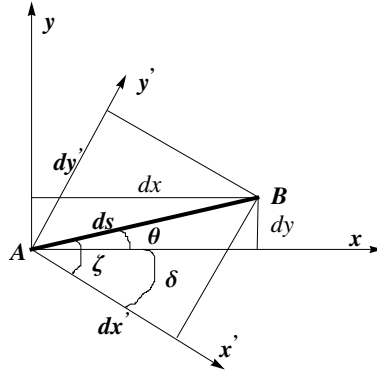


Рис. 2

поэтому длина криволинейного отрезка  $OA$  равна  $s$ . Горизонтальное перемещение будет отрицательным и возникает только за счет изгиба.

Рассмотрим близкую к точке  $A(x, y)$  по деформированной кривой точку  $B(x + dx, y + dy)$  на расстоянии  $ds$  (рис. 2).

Приращения координат будут равны (см. рис. 2)

$$dx = ds \cos \theta, \quad dy = ds \sin \theta, \quad dx' = ds \cos \zeta, \quad dy' = ds \sin \zeta. \quad (2)$$

Изменения углов  $\theta$ ,  $\zeta = \theta + \delta$  связаны с кривизной стержня при изгибе соотношением

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – радиус кривизны стержня. Кривизна стержня считается положительной, если выпуклость кривой направлена вниз. В результате изгиба в сечении стержня  $A$  возникнет изгибающий момент  $M(s)$ . Момент считается положительным, создающим отрицательную кривизну стержня. Имеем

$$M(s) = -P (y'_L - y'), \quad \frac{D}{\rho} = -M(s), \quad (4)$$

где  $y'_L$  – ордината точки приложения нагрузки в подвижных осях,  $D$  – изгибная жесткость стержня. Используя (3), (4), получим

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\zeta}{ds} = \frac{P}{D} (y'_L - y'). \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по  $s$  и учитывая (2), найдем [1]

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -\frac{P}{D} \sin \zeta. \quad (6)$$

Таким образом, задача произвольного изгиба стержня сводится к интегрированию уравнения (6) относительно угла касательной к деформированной оси  $\zeta = \zeta(s)$ . Зная  $\zeta(s)$ , путем интегрирования соотношений (2) можно получить уравнение упругой линии сначала в подвижной системе координат  $(x', y')$ , а затем в неподвижной системе  $(x, y)$ . Уравнение (6) аналогично уравнению колебаний физического маятника с произвольным отклонением  $\zeta$ . Вводя безразмерный силовой параметр (в книге [1] в этом выражении допущена опечатка на с. 60)

$$\beta = L \sqrt{\frac{P}{D}},$$

представим уравнение (6) в виде

$$L^2 \frac{d^2 \zeta}{ds^2} = -\beta^2 \sin \zeta. \quad (7)$$

Выражение (7) обладает первым интегралом

$$\left( L \frac{d\zeta}{ds} \right)^2 = 4\beta^2 \left( C_1 - \sin^2 \frac{\zeta}{2} \right),$$

отсюда

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{2\beta}{L} \sqrt{C_1 - \sin^2 \frac{\zeta}{2}}. \quad (8)$$

Здесь  $C_1$  – произвольная постоянная. Уравнение (8) дает значение кривизны упругой линии в произвольной точке в зависимости от угла касательной  $\zeta$ . Е.П. Попов [1] провел качественное исследование форм равновесия стержней и сделал вывод о существовании трех форм равновесия: перегибной формы, бесперегибной формы и переходной формы. Для каждой формы равновесия постоянная  $C_1$  имеет различные области существования. Для перегибной формы равновесия характерно неравенство

$$\left( \sin^2 \frac{\zeta}{2} \right)_{\max} \leq C_1 < 1.$$

Для бесперегибной формы равновесия имеет место соотношение  $1 < C_1 \leq \infty$ . Наконец, в переходной форме равновесия  $C_1 = 1$ . В нашем случае имеет место перегибная форма равновесия, так как конец консоли является точкой перегиба (здесь момент, а следовательно и кривизна, обращается в нуль). Делая в (8) замену переменной

$$\sin \frac{\zeta}{2} = k \sin \varphi \quad (9)$$

и полагая  $C_1 = k^2$ , получим

$$\frac{d\zeta}{ds} = \frac{2k\beta}{L} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{2k\beta}{L} \cos \varphi. \quad (10)$$

Дифференцируя (9) по  $s$ , найдем

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\beta}{L} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\zeta}{2}} = \frac{\beta}{L} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

Интегрируя (11), определим эллиптический интеграл

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\beta}{L} \int_0^s ds. \quad (12)$$

Величина  $\varphi$  называется амплитудой,  $k$  – модулем эллиптического интеграла ( $0 \leq k \leq 1$ );  $F(\varphi, m)$  – эллиптический интеграл первого рода

$$F(\varphi, m) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}, \quad m = k^2, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \infty. \quad (13)$$

Интеграл  $F(\pi/2, m) = k(m)$  называется полным.

Принимая во внимание (12), перепишем (13) следующим образом:

$$\frac{s}{L} \beta = F(\varphi, m) - F(\varphi_0, m). \quad (14)$$

Выражая параметр  $\beta$  через амплитуду  $\varphi_L$  конца стержня и подставляя в (14), получим [1]

$$F(\varphi, m) = [F(\varphi_L, m) - F(\varphi_0, m)] \frac{s}{L} + F(\varphi_0, m).$$

Амплитуда  $\varphi = \varphi(s)$  будет полностью определена вдоль всей упругой линии стержня, если известны главные эллиптические параметры  $k = \sqrt{m}$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_L$ .

Перейдем к выводу уравнений упругой линии. Преобразуем формулы (2) к виду

$$dx' = \left( 2 \cos^2 \frac{\zeta}{2} - 1 \right) ds, \quad dy' = 2 \sin \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} ds. \quad (15)$$

Последовательно преобразуем первую формулу в (15)

$$\frac{dx'}{L} = \frac{2ds}{L} \left( 1 - \sin^2 \frac{\zeta}{2} \right) - \frac{ds}{L} = \frac{2ds}{L} (1 - k^2 \sin^2 \varphi) - \frac{ds}{L}.$$

Заменяя в этом выражении приращение дуги  $ds$  через приращение амплитуды  $d\varphi$  из (11), окончательно находим

$$\frac{dx'}{L} = \frac{2}{\beta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{ds}{L}. \quad (16)$$

Вторая формула (15) дает

$$\frac{dy'}{L} = \frac{2k}{L} \sin \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} ds = \frac{2k}{\beta} \sin \varphi d\varphi. \quad (17)$$

Интегрируя (16), (17), получим уравнения упругой линии в следящей системе координат в параметрическом виде [1]

$$\frac{x'}{L} = \frac{2}{\beta} [E(\varphi, m) - E(\varphi_0, m)] - \frac{s}{L}, \quad \frac{y'}{L} = \frac{2k}{\beta} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi). \quad (18)$$

Здесь через  $E(\varphi, m)$  обозначен эллиптический интеграл второго рода

$$E(\varphi, m) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - m \sin^2 \psi} d\psi, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \infty,$$

при этом полный интеграл  $E(\pi/2, m)$  будем обозначать через  $E(m)$ .

Угол поворота  $\zeta$  выражается через известные  $\varphi$ ,  $k$  с помощью следующей формулы:

$$\zeta = 2 \arcsin(k \sin \varphi), \quad \theta = \zeta - \delta. \quad (19)$$

Перейдем к конкретным вычислениям в нашей задаче, которая относится к перегибной форме равновесия стержня. Вычислим значения углов в начальной и конечной точках стержня в деформированном состоянии

$$\theta_0 = \theta(0) = 0, \quad \zeta_0 = \zeta(0) = \theta_0 + \delta = \delta.$$

Из качественного анализа кривизны стержня [1] следует, что

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)_0 = \frac{1}{\rho_0} > 0, \quad \zeta_0 > 0, \quad 0 \leq \varphi_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Согласно (10) и равенства нулю кривизны в точке приложения нагрузки

$$\frac{L}{\beta} \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)_L = 2k \cos \varphi_L = 0,$$

получаем  $\varphi_L = \pi/2$ . Полагая в (14)  $s = L$ ,  $\varphi = \varphi_L = \pi/2$  и учитывая (10), найдем [1]

$$\beta = K(m) - F(\varphi_0, m), \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \frac{\delta}{2} = k \sin \varphi_0. \quad (20)$$

В уравнениях (20) неизвестными являются  $m$ ,  $\varphi_0$ , которые определяются из первого и третьего уравнения (20). Величина  $\beta$ , связанная с нагрузкой, задается. По найденным значениям  $m$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_L$  с помощью формул (18) находим выражения для упругой линии стержня, угла поворота и эпюры изгибающего момента [1]

$$\zeta_L = 2 \arcsin k, \quad \theta_L = \zeta_L - \delta, \quad M(s) = M(\varphi(s)) = -\frac{2k}{\beta} PL \cos \varphi.$$

Используя (1), уравнение упругой линии (18) можно записать в неподвижных координатах.

## 2. Продольный изгиб стержня

Частным случаем решения уравнений (18), (20) будет продольный изгиб стержня при  $\delta = 0$ . Уравнения при этом принимают вид

$$\beta = K(m), \quad \varphi_L = \pi/2, \quad \varphi_0 = 0 \quad (21)$$

$$\frac{x_L}{L} = \frac{2}{\beta} E(m) - 1, \quad \frac{y_L}{L} = \frac{2k}{\beta}, \quad (22)$$

$$\theta_L = 2 \arcsin k, \quad M_0 = -\frac{2k}{\beta} PL.$$

Так как полный эллиптический интеграл  $K(m) \geq \pi/2$  при любом  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ), то согласно (21)  $\beta \geq \pi/2$ , а значит, продольная нагрузка должна быть больше критической нагрузки:

$$P \geq \frac{\pi^2 D}{4L^2} = P_{кр},$$

где  $P_{кр}$  – критическая нагрузка Эйлера. Действительно, из последнего уравнения (20) при  $\delta = 0$  следует, что

$$k \sin \varphi_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad k \neq 0,$$

согласно (22)  $y_L \neq 0$  при нагрузке больше критической в балке появляется изгибная форма равновесия (потеря устойчивости плоской формы равновесия). При  $P = P_{кр}$  имеем, что  $\beta = K(m) = E(m) = \pi/2$ , интегралы вырождаются, и из формул (21), (22) следует, что изгиб невозможен, а стержень остается прямолинейным (плоская форма равновесия):

$$x_L = L, \quad y_L = 0, \quad k = 0, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad (0 \leq \beta \leq \pi/2, \quad 0 \leq P \leq P_{кр}).$$

Таким образом, задача устойчивости идеального стержня является частной задачей больших прогибов балки при ее плоском изгибе.

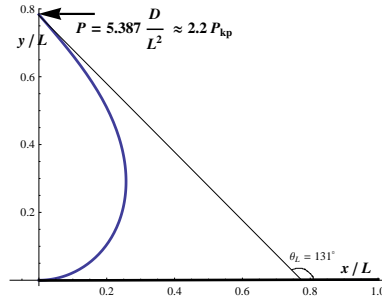


Рис. 3

Решим новую задачу: согнем стержень продольной силой так, чтобы конец консоли достиг вертикали  $y$ . Силу, действующую на балку в этом случае, найдем из условия  $x_L = 0$ . Тогда параметр нагрузки  $\beta$  определится из уравнения (21), а с другой стороны, получим трансцендентное уравнение для определения модуля  $k$

$$\beta = E(m) = K(m). \quad (23)$$

Пользуясь пакетом «Математика» [3] для решения трансцендентного уравнения (23) в окрестности  $m = 0.9$ , получим с погрешностью  $10^{-16}$

$$\beta = 2.32105, \quad m = 0.8261, \quad k = \sqrt{m} = 0.9089, \quad P = 5.38727 \frac{D}{L^2}.$$

В книге Попова [1] и вычислениях Феодосьева [5] с помощью таблиц получены значения для нагрузки с погрешностью  $10^{-3}$

$$P = 5.330 \frac{D}{L^2} \quad [1], \quad P = 5.396 \frac{D}{L^2} \quad [5].$$

Уравнения упругой линии (14), (15) примут вид

$$\frac{x'}{L} = \frac{2}{\beta} E(\varphi, m) - \frac{s}{L}, \quad \frac{y'}{L} = \frac{2k}{\beta} (1 - \cos \varphi), \quad \frac{s}{L} \beta = F(\varphi, m).$$

Исключая из этих уравнений  $s$ , получим параметрические уравнения, описывающие положение деформированного стержня в плоскости (рис. 3)

$$\frac{x}{L} = \frac{1}{\beta} [2E(\varphi, m) - F(\varphi, m)], \quad \frac{y}{L} = \frac{2k}{\beta} (1 - \cos \varphi), \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Найдем из этих соотношений прогиб  $v_L$  в точке приложения нагрузки, горизонтальное смещение  $u_L$ , изгибающий момент  $M_0$  и угол поворота  $\theta_L$

$$v_L = y(\varphi_L) = 0.7832 L, \quad u_L = [x_L(\varphi_L) - 1] L,$$

$$M_0 = -0.7832 PL, \quad \theta_L = \zeta_L = 2 \arcsin k = 2.2813,$$

или угол поворота, выраженный в градусах,  $\theta_L = 130.7^\circ$ .

### 3. Продольно-поперечный изгиб

Проведем вычисления изгиба консоли сосредоточенной нагрузкой такой же величины  $P = 5.38727 D/L^2$ , как на рис. 3, но наклоненной под углом  $\delta = \pi/4$ .

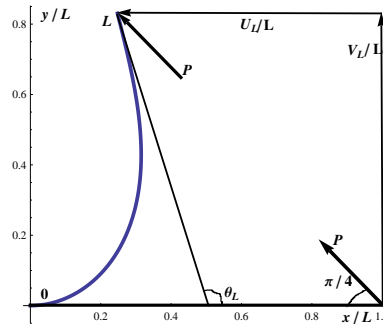


Рис. 4

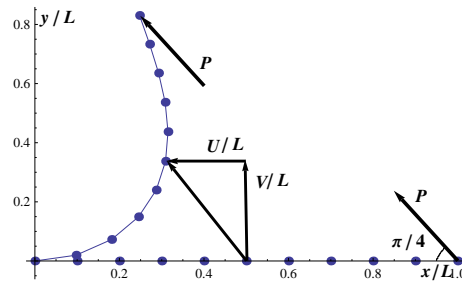


Рис. 5

Понятно, что такая нагрузка не сможет согнуть стержень до касания его оси  $y$ . Подсчитывая параметр нагрузки  $\beta = 2.32105$  и решая трансцендентные уравнения (20), найдем  $m = 0.929$ ,  $\varphi_0 = 0.4083$ . Затем согласно (1), (18) построим кривую деформированного стержня (рис. 4).

Полученные данные позволяют определить перемещения конца консоли, момент в заделке и наибольший угол поворота

$$u_L = 0.7525 L, \quad v_L = 0.8305 L, \quad M_0 = -\left(\frac{2k}{\beta}\right) \cos \varphi_0 PL = -0.7623 PL,$$

$$\theta_L = 2 \arcsin k - \delta = 1.8167, \quad \theta_L = 104.1^\circ.$$

На рис. 5 показано положение материальных точек стержня до деформации и их положение в результате перемещений  $U, V$  после изгиба.

Получим кривые изогнутого стержня при нагрузках  $P^k$ :

$$P^k = \frac{akD}{mL^2}, \quad (24)$$

где  $a = 5.38727$ ,  $m = 10$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ . Вычисляя параметры нагрузки  $\beta_1 = 0.7340$ ,  $\beta_2 = 1.0380$ ,  $\beta_3 = 1.2713$ ,  $\beta_4 = 1.4680$ ,  $\beta_5 = 1.6412$ ,  $\beta_6 = 1.7980$ ,  $\beta_7 = 1.9419$ ,  $\beta_8 = 2.0760$ ,  $\beta_9 = 2.2019$ , решаем трансцендентные уравнения

$$K(m) - F(\varphi_0, m) = \beta_i, \quad \sqrt{m} \sin \varphi_0 = \sin \delta/2,$$

откуда находим параметры  $m, \varphi_0$ , значения которых приведены в табл. 1. По этой таблице с использованием формул (1), (18) построим деформированное изображение стержня (см. рис. 6) при каждой нагрузке  $P^k$ . На рис. 6 пунктирной линией показан прогиб балки под нагрузкой  $P^1$ , подсчитанный по линейной теории изгиба.



Табл. 1

Связь нагрузки с эллиптическими параметрами

$P^k$	$m$	$\varphi_0$
$P^1$	0.232946	0.915536
$P^2$	0.359062	0.692727
$P^3$	0.503146	0.569845
$P^4$	0.630814	0.502736
$P^5$	0.728016	0.465094
$P^6$	0.797925	0.442731
$P^7$	0.847729	0.42864
$P^8$	0.883525	0.419307
$P^9$	0.909638	0.412871

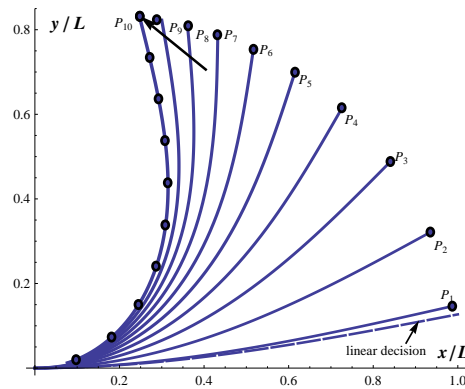


Рис. 6

#### 4. Приближенное решение

Получим решение поставленной задачи приближенным методом [4]. По сути он представляет собой метод конечных элементов в сочетании с методом начальных параметров и позволяет решать как линейные, так и нелинейные задачи. Отличие метода [4] от метода конечных элементов заключается в том, что при увеличении количества элементов количество неизвестных не увеличивается. Деформированная кривая стержня аппроксимируется ломаной линией, состоящей из прямолинейных стержней. Вводится глобальная (неподвижная) система координат  $X, Y$  и локальная (подвижная) система координат  $x, y$ , связанная с выбранным прямолинейным стержнем (рис. 7). В нашей задаче первоначальная консольная балка получает большие перемещения и углы поворота в рамках малых деформаций (выполняется закон Гука). Из теории упругости известно, что произвольные перемещения точек тела складываются из жестких перемещений твердого тела и упругих перемещений в результате деформаций в окрестности точки. А так как упругие перемещения являются малыми, то при больших перемещениях преобладают перемещения точек твердого тела.

Таким образом, можно аналитически определять большие перемещения любого стержня как сумму упругих перемещений прямолинейного элемента и перемещений твердого тела с полюсом в точках их контакта. Причем упругие малые перемещения в локальной системе координат элементарно находятся и выражаются через начальные параметры

$$v(x) = v_0 + \alpha_0 x - \frac{M_0}{2D} x^2 - \frac{Q_0}{6D} x^3,$$

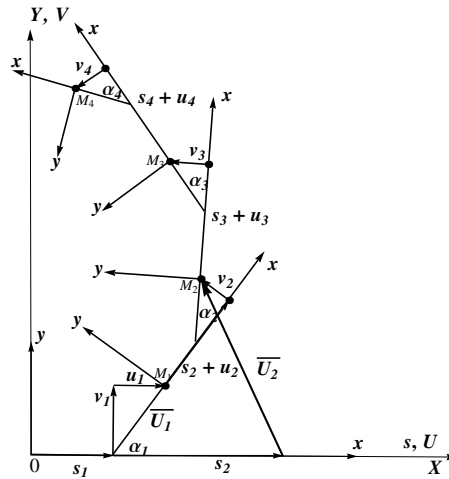


Рис. 7

$$\alpha(x) = v'(x) = \alpha_0 - \frac{M_0}{D}x - \frac{Q_0}{2D}x^2, \quad u_T(x) = u_0 + \frac{T_0}{B}x,$$

где  $u_0$ ,  $T_0$ ,  $M_0$ ,  $Q_0$ ,  $v_0$ ,  $\alpha_0$  – начальные параметры в локальной системе координат, характеризующие начальное растяжение и усилие, изгибающий момент, поперечную силу, начальный прогиб и угол поворота,  $B$ ,  $D$  – жесткости стержня на растяжение и изгиб,  $u_T$  – продольное перемещение, вызванное растяжением оси стержня. Положение материальных точек в стержне будем определять длиной дуги  $s \approx x$ .

При больших прогибах изгибающий момент и радиус кривизны связаны соотношениями [4]

$$\frac{M(s)}{D} = \frac{1}{\rho(s)} = -\frac{1}{\cos \alpha(s)} \frac{d^2 v}{ds^2}, \quad \frac{dv}{ds} = \sin \alpha(s). \quad (25)$$

При этом в результате сильного изгиба появляется продольное перемещение  $u_M$ , вызванное сильным изгибом [4]

$$\frac{du_M}{ds} = \cos \alpha(s) - 1. \quad (26)$$

После того, как формулы (25) были нами опубликованы в [4], выяснилось, что близкие к ним получены ранее академиком В.В. Новожиловым [6] из других соображений: на основании геометрической гипотезы Кирхгофа выведены выражения для деформаций в произвольной точке гибкой пластины с точностью до пренебрежения удлинениями и сдвигами по сравнению с единицей. Затем полученные формулы для деформаций применили к изгибу бесконечно длинной полосы (плоская деформация). Для определения зависимости между скоростью изменения в поперечном направлении горизонтальных и вертикальных перемещений В.В. Новожилову пришлось предположить несжимаемость оси стержня. Далее выяснилось, что изгибная компонента в выражении продольной деформации суть кривизна деформированного в цилиндрическую поверхность срединного слоя пластины.

В локальной системе прогибы и углы поворота можно считать малыми. Тогда, представляя

$$\cos \alpha(s) \approx 1 - \frac{\alpha^2(s)}{2},$$

проинтегрируем (26) с учетом условий в заделке  $u_0 = v_0 = \alpha_0 = 0$

$$u(x) = u(s) = u_T(x) + u_M(x) = \frac{T_0}{B} x - \frac{1}{D^2} \left( \frac{M_0^2}{3} x^3 + \frac{M_0 Q_0}{4} x^4 + \frac{Q_0^2}{20} x^5 \right), \quad (27)$$

$$v(x) = \alpha_0 x - \frac{M_0}{2D} x^2 - \frac{Q_0}{6D} x^3, \quad \alpha(x) = -\frac{M_0}{D} x - \frac{Q_0}{2D} x^2. \quad (28)$$

Оценка показывает, что перемещение  $u_T(x)$  в результате растяжения оси стержня мало по сравнению с перемещением  $u_M(x)$  благодаря сильному изгибу (оно имеет порядок  $h^2/L^2$  по сравнению с единицей, где  $h$  – толщина стержня) и им можно пренебречь для очень тонких стержней.

Предположим, что первоначальное недеформированное положение балки состоит из  $n$  элементов длиной  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . В результате деформации концы этих элементов переместятся в точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$  (рис. 7). Будем приписывать дополнительный индекс перемещениям и начальным параметрам – номер элемента. Для первого элемента перепишем формулы (27), (28) следующим образом:

$$v_1(s_1) = -\frac{M_{01}}{2D} s_1^2 - \frac{Q_{01}}{6D} s_1^3, \quad \alpha_1 = v_1'(s_1) = -\frac{M_{01}}{D} s_1 - \frac{Q_{01}}{2D} s_1^2,$$

$$u_1(s_1) = \frac{T_{01}}{B} s_1 - \frac{1}{D^2} \left( \frac{M_{01}^2}{3} s_1^3 + \frac{M_{01} Q_{01}}{4} s_1^4 + \frac{Q_{01}^2}{20} s_1^5 \right).$$

Перемещения конца первого элемента точки  $M_1$  в глобальной и локальной системах координат совпадают:

$$U_1 = u_1 = u_1(s_1), \quad V_1 = v_1 = v_1(s_1).$$

Для второго элемента аналогично имеем

$$v_2(s_2) = -\frac{M_{02}}{2D} s_2^2 - \frac{Q_{02}}{6D} s_2^3, \quad \alpha_2 = v_2'(s_2) = -\frac{M_{02}}{D} s_2 - \frac{Q_{02}}{2D} s_2^2,$$

$$u_2(s_2) = \frac{T_{02}}{B} s_2 - \frac{1}{D^2} \left( \frac{M_{02}^2}{3} s_2^3 + \frac{M_{02} Q_{02}}{4} s_2^4 + \frac{Q_{02}^2}{20} s_2^5 \right).$$

Начальные параметры для второго элемента вычисляются из условий статики первого элемента с учетом угла поворота  $\alpha_1$  конца первого элемента:

$$Q_{02} = Q_{01} \cos \alpha_1 - T_{01} \sin \alpha_1, \quad T_{02} = Q_{01} \sin \alpha_1 + T_{01} \cos \alpha_1,$$

$$M_{02} = M_{01} + Q_{01}(s_1 + u_1) - T_{01}v_1$$

Вычислим перемещения точки  $M_2$ , проектируя векторное равенство (рис. 7) на неподвижные оси:

$$\overline{U}_2 = \overline{OM}_1 + \overline{M_1M_2} - (\overline{s}_1 + \overline{s}_2),$$

$$U_2 = U_1 - s_2(1 - \cos \alpha_1) + u_2 \cos \alpha_1 + v_2 \cos(\alpha_1 + \pi/2),$$

$$V_2 = V_1 + (s_2 + u_2) \sin \alpha_1 + v_2 \sin(\alpha_1 + \pi/2).$$

Аналогичные вычисления перемещений  $k$ -й точки дают

$$U_k = u_1 + \sum_{j=2}^k [u_j \cos \theta_{j-1} + v_j \cos(\theta_{j-1} + \pi/2) - s_j(1 - \cos \theta_{j-1})],$$

$$V_k = v_1 + \sum_{j=2}^k [(s_j + u_j) \sin \theta_{j-1} + v_j \sin(\theta_{j-1} + \pi/2)], \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

либо

$$\begin{aligned} U_k &= U_{k-1} - s_k(1 - \cos \theta_{k-1}) + u_k \cos \theta_{k-1} + v_k \cos(\theta_{k-1} + \pi/2), \\ V_k &= V_{k-1} + (s_k + u_k) \sin \theta_{k-1} + v_k \sin(\theta_{k-1} + \pi/2), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\theta_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i, \quad \alpha_i = -\frac{M_{0i}}{D} s_i - \frac{Q_{0i}}{2D} s_i^2,$$

$\theta_k$  является углом поворота стержня в  $k$ -м сечении,

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{T_{0i}}{B} s_i - \frac{1}{D^2} \left( \frac{M_{0i}^2}{3} s_i^3 + \frac{M_{0i}Q_{0i}}{4} s_i^4 + \frac{Q_{0i}^2}{20} s_i^5 \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ v_i &= -\frac{M_{0i}}{2D} s_i^2 - \frac{Q_{0i}}{6D} s_i^3. \end{aligned}$$

Для пересчета статических условий от  $(i-1)$ -го узла к  $i$ -му узлу необходимо учесть деформированное состояние элемента:

$$Q_{0i} = Q_{0,i-1} \cos \alpha_{i-1} - T_{0,i-1} \sin \alpha_{i-1}, \quad T_{0i} = Q_{0,i-1} \sin \alpha_{i-1} + T_{0,i-1} \cos \alpha_{i-1},$$

$$M_{0i} = M_{0,i-1} + Q_{0,i-1}(s_{i-1} + u_{i-1}) - T_{0,i-1}v_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Начальные параметры  $T_0$ ,  $Q_0$  в заделке при любой конфигурации изгиба стержня не изменяются вследствие консервативности нагрузки. Величина  $M_0$  зависит от изгиба стержня тем сильнее, чем больше его изгиб. Поэтому для определения начального параметра  $M_0$  будем использовать метод последовательных нагружений. Допустим, что нагрузка  $P$  имеет следующую последовательность  $m$  значений (24). Выберем  $m$  настолько большим, чтобы при  $P^1$  эта нагрузка вызвала малые перемещения. Тогда все начальные параметры находятся из условий статики недеформированного состояния:

$$T_0 = T_{01}^1 = -P^1 \cos \delta, \quad Q_0 = Q_{01}^1 = P^1 \sin \delta,$$

$$M_0 = M_{01}^1 = -P^1 L \sin \delta.$$

По формулам (29) найдем перемещения точки приложения нагрузки  $U_n^1, V_n^1$ , по которым из условий статики деформированного состояния определим второе приближение начального параметра:

$$M_{01}^2 = -P^2[(L + U_n^1) \sin \delta + V_n^1 \cos \delta].$$

Здесь верхние индексы относятся к порядку нарастания нагрузки, нижние индексы – к нумерации элементов (индекс 0 означает начальный параметр). Для того чтобы построить конфигурацию стержня при нагрузке  $P^m$ , необходимо пройти все последовательности нагружений  $P^k$ , причем каждый раз надо определять начальный изгибающий момент, учитывая предыдущее деформированное состояние

$$T_{01}^k = -P^k \cos \delta, \quad Q_{01}^k = P^k \sin \delta,$$

$$M_{01}^k = -P^k l_k[(L + U_n^{k-1}) \sin \delta + V_n^{k-1} \cos \delta], \quad (30)$$

где  $l_k$  – коэффициент релаксации (уменьшения) нагрузки, определяемый в процессе вычислений из условия сходимости процесса итераций.

Проведем приближенное вычисление произвольного изгиба балки при следующих геометрических и механических характеристиках: сила  $P^k$  действует под

Табл. 2

Сравнение точного и приближенного решения

$P^k$	$U_p$	$Q$	$U_t$	$V_p$	$Q$	$V_t$	$\theta_p^\circ$	$Q$	$\theta_t^\circ$
$P^1$ $l_1 = 1$	-0.012999	3	-0.012996	0.14636	3	0.14635	12.71	3	12.72
$P^2$ $l_2 = 1$	-0.064967	4	-0.064837	0.32160	4	0.32128	28.65	4	28.62
$P^3$ $l_3 = 1$	-0.15948	2	-0.15935	0.48837	2	0.48812	45.36	2	45.36
$P^4$ $l_4 = 1$	-0.27446	2	-0.27386	0.61549	2	0.61483	60.21	2	60.16
$P^5$ $l_5 = 1$	-0.38492	3	-0.38510	0.69955	3	0.69935	72.03	3	72.13
$P^{5.5}$ $l_{5.5} = 1$	-0.43723	6	-0.43426 интерпол.	0.73027	6	0.72629 интерпол.	77.2	6	76.85 интерпол.
$P^6$ $l_6 = 0.98$	-0.48316	1	-0.48342	0.75358	1	0.75322	81.43	1	81.57
$P^7$ $l_7 = 0.96$	-0.56851	1	-0.56752	0.78811	1	0.78723	89.07	1	89.06
$P^8$ $l_8 = 0.96$	-0.63756	1	-0.6390	0.8093	1	0.8087	94.72	1	95.09
$P^9$ $l_9 = 0.925$	-0.71188	0	-0.70000	0.82369	0	0.82216	101.57	0	100.01
$P^{10}$ $l_{10} = 0.969$	-0.75200	0	-0.75247	0.83170	0	0.83046	103.78	0	104.09

углом  $\delta = \pi/4$  на балку длины  $L = 60$  см с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, прямоугольным поперечным сечением толщины  $h = 0.4$  см и ширины  $b = 0.8$  см. В отличие от точного решения, здесь есть возможность учесть растяжение оси стержня. Жесткости вычисляются по формулам

$$D = EI_z, \quad B = Ebh, \quad I_z = \frac{bh^3}{12}.$$

Число элементов примем равным  $n = 10$ , число нагружений –  $k = 10$ , разбиение на элементы – равномерным,  $s = s_k = L/n$ . Так как формула (30) определяет начальный параметр  $M_{01}^k$  на основании предыдущего  $(k-1)$ -го приближения, его можно уточнить, вычисляя несколько раз значения перемещений конца консоли по формулам (30) для нагрузки  $P^k$ . В табл. 2 число этих уточнений обозначено через  $Q$ . Такие вычисления успешно шли по нагрузке, вплоть до параметра нагружения  $k = 5$ . При использовании этой схемы для нагрузки  $P^6$  итерации по начальному параметру стали давать расходимость процесса. Это свидетельствовало о том, что шаг по нагрузке необходимо уменьшать. И действительно, увеличение нагрузки на полшага (шаг равен единице) дало для нагрузки  $P^{5.5}$  приемлемые результаты. Далее, уменьшение шага нагрузки было введено в формулу (30) с помощью коэффициента уменьшения нагрузки  $l_k$  с сохранением первоначального шага. Все данные вычислений приведены в виде табл. 2, содержащей точные и приближенные решения. Графическое сравнение точного и приближенного относительного прогиба для различных нагрузок показано на рис. 6. На этом рисунке приближенное решение показано кружочками. В табл. 2 представлены приближенные и точные значения относительных перемещений  $U/L, V/L$  и углов поворота в точке приложения нагрузок  $P^k$ , индексом  $p$  помечено приближенное решение, индексом  $t$  – точное решение.

### Заключение

Как и следовало ожидать, приведенный пример приближенного вычисления хотя и учитывает сжимаемость осевой линии стержня, тем не менее дает совпадение результатов до двух-трех значащих цифр. Кроме того, приближенный метод свободен от гипотезы несжимаемости стержня, точное решение которого в этом случае неизвестно. Более того, приближенный метод может быть использован для различных распределенных нагрузок, как консервативных, так и следящих.

### Summary

*Yu. P. Artyukhin. Arbitrary Bending of a Cantilever Beam by a Conservative Force.*

In this article, a further development of our approximate method for analysis of the arbitrary elastic bending of a beam by forces constant in space is presented. The bending of the cantilever by the concentrated gravity load on its end is considered. A numerically exact solution for ten values of the conservative load is obtained and compared with the similar approximate solution. The bending of the cantilever makes 0.8 of its length. A sufficient accuracy of the results for engineering calculations is observed.

**Keywords:** elasticity, conservative load, initial parameter, large deflections, approximate solution.

### Список литературы

1. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики тонкостенных стержней. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 170 с.
2. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М: Наука, 1979. – 830 с.
3. Артюхин Ю.П., Гурьянов Н.Г., Котляр Л.М. Система Математика 4.0 и ее приложения в механике. – Казань – Наб. Челны: Изд-во КамПИ, 2002. – 415 с.
4. Артюхин Ю.П. Приближенный аналитический способ исследования деформаций пространственных криволинейных стержней // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 3. – С. 97–111.
5. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1 / Под ред. С.Д. Пономарева. – М.: Машгиз, 1956. – 884 с.
6. Новожиллов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.

Поступила в редакцию  
12.03.13

---

**Артюхин Юрий Павлович** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: [JArtuhi@kpfu.ru](mailto:JArtuhi@kpfu.ru)